



TITLE:

正則なデータを持つ Fuchs 型 Cauchy 問題の解の特異性(複素領 域の偏微分方程式)

AUTHOR(S):

山根, 英司

CITATION:

山根, 英司. 正則なデータを持つ Fuchs 型 Cauchy 問題の解の特異性(複素領域の偏微分方程式). 数理解析研究所講究録 1998, 1028: 79-93

ISSUE DATE:

1998-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/61797>

RIGHT:

正則なデータを持つ Fuchs 型 Cauchy 問題の解の特異性

山根英司 (Hideshi Yamane)¹

Abstract

Baouendi と Goulaouic によると, ウェイト $m - m'$ の Fuchs 型 Cauchy 問題は, データが正則で特性指数が整数 $\geq m - m'$ の値を取らないとき, 正則な解をただ一つ持つ。筆者はいくつかの特性指数が整数 $\geq m - m'$ の値を取るときの解の特異性について調べた。なお, 97 年 9 月に数理解研で講演したときよりも結果は強くなっている。

1 イントロダクション

$C_t \times C_x^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, の原点 $(0, 0)$ の近傍で, 次の形の Cauchy 問題を考えよう: Ω を $0 \in C_x^n$ の開近傍とし, $P = P(t, x, D_t, D_x)$ を正則な係数を持つ m 階の線型偏微分作用素とする: ここで $D_t = \partial/\partial t$, $D_x = (D_1, \dots, D_n) = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ 。 P はウェイト $m - m'$ の Fuchs 型作用素とする。すなわち

$$P(t, x, D_t, D_x) = t^{m'} D_t^m + a_{m-1}(x) t^{m'-1} D_t^{m-1} + \dots + a_{m-m'}(x) D_t^{m-m'} + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\beta| \leq m-j} t^{\alpha(j)} a_{j\beta}(t, x) D_t^j D_x^\beta.$$

ここで $0 \leq m' \leq m$, $\alpha(j) = \max\{0, j - (m - m') + 1\}$, $D_x^\beta = D_1^{\beta_1} \dots D_n^{\beta_n}$ であり, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$ 。 また $a_{m-j}(x)$ ($j = 1, \dots, m'$), $a_{j\beta}(t, x)$ ($j = 0, \dots, m-1$, $|\beta| \leq m-j$) はそれぞれ $\Omega, \{t; |t| < T\} \times \Omega$ の正則関数 ($T > 0$) とする。

作用素

$$P_m(t, x, D_t, \hat{D}_x) = t^{m'} D_t^m + a_{m-1}(x) t^{m'-1} D_t^{m-1} + \dots + a_{m-m'}(x) D_t^{m-m'}$$

¹275 千葉県習志野市芝園 2-1-1 千葉工業大学数学教室 yamane@cc.it-chiba.ac.jp
1991 Mathematics Subject Classifications: 35A20

を P の Fuchsian principal part と呼ぶ。

P の特性多項式とは

$$\begin{aligned} C(\lambda, x) &= t^{-\lambda} t^{m-m'} P_m t^\lambda \\ &= \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+1) + a_{m-1}(x) \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+2) \\ &\quad + \cdots + a_{m-m'}(x) \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+m'+1) \end{aligned}$$

で定義されるものであり、その根（特性指数と呼ばれる）を

$$\lambda_1(x), \dots, \lambda_{m'}(x), \lambda_{m'+1} = 0, \lambda_{m'+2} = 1, \dots, \lambda_m = m - m' - 1.$$

で表わす。

この種の作用素の研究を始めたのは Baouendi と Goulaouic ([3]) である。彼らによる基本的な結果を述べる：

定理 [Baouendi-Goulaouic] x^* を Ω の点とする。もし 任意の整数 $\lambda \geq m - m'$ について $C(\lambda, x^*) \neq 0$ であれば、 $(t, x) = (0, x^*)$ の近傍の任意の正則関数 $f(t, x)$ と $x = x^*$ の近傍の任意の正則関数 $f_0(x), \dots, f_{m-m'-1}(x)$ に対して、 $(t, x) = (0, x^*)$ の近傍で正則関数 $u(t, x)$ が一意に存在して次を満たす：

$$(IVP) \quad \begin{cases} Pu = f, \\ D_t^\lambda u(0, x) = f_\lambda(x) \end{cases} \quad (0 \leq \lambda \leq m - m' - 1).$$

この論説では (IVP) を次の条件の下で考える：

- ある整数 $\lambda \geq m - m'$ に対して $C(\lambda, 0) = 0$ であり、任意に固定された整数 $\lambda \geq m - m'$ に対して $C(\lambda, x) \neq 0$,
- $f(t, x)$ は $(t, x) = (0, 0)$ の近傍で正則,
- $f_0(x), \dots, f_{m-m'-1}(x)$ は $x = 0$ の近傍で正則。

集合 V を

$$V = \{x \in \Omega; \text{ある整数 } \lambda \geq m - m' \text{ に関して } C(\lambda, x) = 0\}$$

で定義する。これは Ω の余次元 1 の解析的集合である。より詳しくいうと、各 $\lambda \geq m - m'$ に対して $V_\lambda = \{x \in \Omega; C(\lambda, x) = 0\}$ と置くと、 $\{V_\lambda\}_{\lambda \geq m-m'}$

は Ω の解析的集合の局所有限な族を成し、また明らかに $V = \bigcup_{\lambda \geq m-m'} V_\lambda$ である。

任意の点 $x^* \in \Omega \setminus V$ に対し、上記の定理の仮定が満たされ、 V は解 u の解析接続の障害となる。 u が V の近くでどれだけ解析接続されるか、というのは自然な問題である。

$d(x)$ を点 $x \in \Omega$ から $\partial(\Omega \setminus V) = \partial\Omega \cup V$ までの距離とする。もし x が $x=0 \in \mathbb{C}_x^n$ に十分近ければ、 $d(x)$ は x から V までの距離に他ならない。

次が成り立つ：

命題 1 (IVP) の解 $u(x)$ は

$$\{(t, x); |t| < \tilde{C}d(x)^m, x \in \tilde{\Omega}\}$$

の形の領域で正則である。ここで $\tilde{\Omega}$ は $x=0$ の近傍であり、 \tilde{C} は t と x によらない正定数。

もっと詳しい結果を示すことができる。それは $I(P)$, $0 \leq I(P) \leq m$, という量を用いて記述される。 $I(P)$ は P とその Fuchsian principal part P_m との差を表わす。定義には Newton polygon に似たものを使う。なお、 $P - P_m$ の低階項は $I(P)$ に寄与しない。

$$P - P_m = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\beta| \leq m-j} t^{\alpha(j)} a_{j\beta}(t, x) D_t^j D_x^\beta,$$

$$\alpha(j) = \max\{0, j - (m - m') + 1\}$$

であることを思い出そう。 $a_{j\beta}$ を t で巾級数展開して、

$$P - P_m = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\beta| \leq m-j} \sum_{i=0}^{\infty} t^i a_{ij\beta}(x) D_t^j D_x^\beta,$$

ここで $i \leq j - (m - m')$ のとき $a_{ij\beta}(x) \equiv 0$

と書ける。各 $j = 0, 1, \dots, m-1$ に対して、 $\{1, 2, \dots\} \times \{m-j\}$ の部分集合 $N_j(P)$ を

$$(k, m-j) \in N_j(P)$$

$$\iff j + |\beta| = m \text{ を満たすある } \beta \text{ に対して } a_{k+j-(m-m'), j, \beta}(x) \neq 0$$

で定義する。明らかに $N_j(P)$ は P の主部だけで決まる。

$N(P)$ を $N_0(P), N_1(P), \dots, N_{m-1}(P)$ の和集合とすると, $N(P)$ は $\{1, 2, \dots\} \times \{1, \dots, m\}$ の部分集合である。

$$I(P) = \max\{l/k; (k, l) \in N(P)\}$$

と置く。ただし, もし $N(P) = \emptyset$ ならば $I(P) = 0$ と置く。明らかに $0 \leq I(P) \leq m$ である。

$k_j \geq 1$ を $(k, m-j) \in N_j(P)$ となる最小の k とする。ただし, もし $N_j(P) = \emptyset$ ならば $k_j = \infty$ と置く。

$$I(P) = \max_j \frac{m-j}{k_j}$$

である。

主定理を述べよう。

主定理 (IVP) の解 $u(t, x)$ は

$$\{(t, x); |t| < \tilde{C}d(x)^{I(P)}, x \in \tilde{\Omega}\}$$

の形の領域で正則である。ここで $\tilde{\Omega}$ は $x = 0$ の開近傍であり, \tilde{C} は t と x によらない正定数である。ただし, もし $I(P) = 0$ ならば, この領域は

$$\{(t, x); |t| < \tilde{C}, x \in \tilde{\Omega} \setminus V\}$$

であると解釈する。

Fuchs 型 Cauchy 問題が特異なデータを持つ場合,あるいは特性指数が non-generic な値を持つ場合についてはいくつかの研究がある。例えば [5] や [6] を見よ。これらの論文では, 初期値の特異点や (筆者の記号でいう) V は非特異超曲面だと仮定されている。また作用素の主表象はある種の factorization を持つと仮定されており, その結果, 相関数について詳しく調べることができる。

一方この論説では, V は余次元 1 の任意の解析的集合でありうるし, また, 主部の factorization についての仮定は何も置かない。

2 積分作用素

このセクションでは [3] に従う。

$Q(t, x, D_t, D_x)$ を m 階でウェイト 0 の Fuchs 型偏微分作用素とする。
 $\mu_r(x)$ ($r = 1, 2, \dots, m$) でその特性指数を表わす。

また全ての r に関して $\operatorname{Re} \mu_r(0) < 0$ と仮定する。そうすると、原点の十分近くで、全ての r に関して $\operatorname{Re} \mu_r(x) < 0$ となる。

もし $g(t, x)$ が $(t, x) = (0, 0)$ の近くで正則ならば

$$\begin{aligned} v(t, x) &= H[g](t, x) \\ &= \int_{[0,1]^m} s_1^{-\mu_1(x)-1} \cdots s_m^{-\mu_m(x)-1} g(s_1 \cdots s_m t, x) ds_1 \cdots ds_m \end{aligned}$$

は $Q_m v = g$ の一意な正則解を与える。ここで Q_m は Q の Fuchsian principal part である。

$H[g]$ の他のやり方で書くことができる:

$$H[g] = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} \int_{[0,1]^m} s_{\pi(1)}^{-\mu_1(x)-1} \cdots s_{\pi(m)}^{-\mu_m(x)-1} g(s_1 \cdots s_m t, x) ds_1 \cdots ds_m.$$

ここで S_m は m 次対称群。 $H[g]$ が正則であることは $\sum_{\pi \in S_m} s_{\pi(1)}^{z_1} \cdots s_{\pi(m)}^{z_m}$ に次の補題を当てはめれば分かる。

補題 1 $F(z)$ は \mathbf{C}_z^m , $z = (z_1, \dots, z_m)$, の整関数で対称だとする:

任意の $\pi \in S_m$ に対し $F(z_1, \dots, z_m) = F(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(m)})$ 。

$p_1(z), \dots, p_m(z)$ を

$$\begin{aligned} &(X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_m) \\ &= X^m - p_1 X^{m-1} + p_2 X^{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1} p_{m-1} X + (-1)^m p_m \end{aligned}$$

で定義する。ここで X は不定元。このとき \mathbf{C}_p^m , $p = (p_1, \dots, p_m)$, 上の整関数 $G(p_1, \dots, p_m)$ が一意に存在して、 $F(z) = G(p_1(z), \dots, p_m(z))$ が成り立つ。

証明 対称多項式の列 $\{F_k(z)\}$, $\deg F_k = k$ が存在して、 F_k は F に広義一様収束する。 p の k 次多項式 $G_k(p)$ が存在して $F_k(z) = G_k(p_1(z), \dots, p_m(z))$ が成り立つ。

一方、任意の $R > 0$ に対して $N > 0$ が存在して、 $|p(z)| < R \Rightarrow |z| < N$ が成り立つ。

ゆえに $\{G_k(p)\}$ は $|p| < R$ における Cauchy 列となり、したがってある整関数 $G(p)$ に収束する。 \square

もし x が原点に十分近ければ, g と (t, x) によらない正定数 C が存在して,

$$|H[g](t, x)| \leq C \sup_{|\tau| \leq |t|} |g(\tau, x)|$$

が成り立つ。

主定理を証明するには $H[g]$ に関する評価が他にも必要である。

$k = 0, 1, \dots, m$ に対し,

$$H_k[g](t, x) = \int_{[0,1]^k} s_1^{-\mu_1(x)-1} \dots s_k^{-\mu_k(x)-1} g(s_1 \dots s_k t, x) ds_1 \dots ds_k$$

と置く。

明らかに $H_m[g] = H[g]$ 。 $k < m$ に対し, 関数 $H_k[g]$ は x について正則とは限らないが, 次の評価は確かに成り立つ:

$$|H_k[g](t, x)| \leq C_k \sup_{|\tau| \leq |t|} |g(\tau, x)|。$$

ここで C_k は g と (t, x) によらない正定数。

公式

$$tD_t H_k[g] = \mu_k(x) H_k[g] + H_{k-1}[g]$$

を繰り返して用いると, x が原点に十分近いとき

$$|(tD_t)^j H[g](t, x)| \leq C' \sup_{|\tau| \leq |t|} |g(\tau, x)| \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

であることが分かる。ここで C' は g と (t, x) によらない正定数。 $(tD_t)^j H$ は(有界)積分作用素であるが, $(tD_t)^j$ 自体はそうではないことに注意しよう。

$(D_t t)^j$ は $1, tD_t, \dots, (tD_t)^j$ の線型結合だから, 次の評価が得られる:

命題 2 もし x が原点に十分近ければ, g と (t, x) によらない正定数 A が存在して

$$|(D_t t)^j H[g](t, x)| \leq A \sup_{|\tau| \leq |t|} |g(\tau, x)| \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

注意 $D_t t$ を tD_t よりも好むのは, 前者が正則関数の Fréchet 空間の topological automorphism であるのに対して, 後者は全射でも単射でもないからである。

積分作用素をもう一つ導入しよう。 $g = g(t)$ に対して

$$G_l[g](t) = \int_{[0,1]^l} g(s_1 \cdots s_l t) ds_1 \cdots ds_l$$

と定義する。容易に分かるように $G_l(D_t t)^l = \text{identity}$, $(D_t t)^j = G_{m-j}(D_t t)^m$ である。さらに,

補題 2 もし $|g(t)| \leq |t|^p$ ならば

$$|G_l[g](t)| \leq \frac{|t|^p}{(p+1)^l}.$$

証明 $|G_l[g](t)| \leq \int_0^1 ds_1 \cdots \int_0^1 ds_l \{s_1^p \cdots s_l^p |t|^p\}.$ □

3 ウェイト 0 の場合の証明

このセクションでは主定理の $m = m'$ の場合を証明する: すなわち作用素 P は ウェイト 0 だと仮定する。この場合 (IVP) では初期条件を課さない。まず $f(t, x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(x) t^{\lambda}$, $u(t, x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} u_{\lambda}(x) t^{\lambda}$ と書くと下記の漸化式が成り立つ:

$$C(0, x) u_0(x) = f_0(x)$$

$$C(\lambda, x) u_{\lambda}(x) = f_{\lambda}(x) + \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} P_{\lambda}^{\nu}(x, D_x) u_{\nu}(x), \quad \lambda = 1, 2, \dots.$$

ここで $P_{\lambda}^{\nu}(x, D_x)$ はある微分作用素。 x の関数 $C(\lambda, x)$ は原点を含むある解析的集合の上で消えるかもしれないが、恒等的に消えることはないとは仮定されているのだった。よって各 $u_{\lambda}(x)$ は有理型関数として一意に定まる。singular set は $\cup_{\nu \leq \lambda} V_{\nu} \subset V$ に含まれる。

次に $\text{Re } \lambda_r(0) < h \in \mathbb{N}$ ($r = 1, \dots, m$) と仮定する。明らかに $Q = t^{-h} P t^h$ は m 階の Fuchs 型微分作用素でウェイトは 0 である。この特性指数を $\mu_r(x)$ と表わすと $\mu_r(x) = \lambda_r(x) - h$ であり, 任意の r に対して $\text{Re } \mu_r(0) < 0$ である。さらに $N(P) = N(Q)$ が示される。

$u(t, x) = \sum_{\lambda=0}^{h-1} u_{\lambda}(x) t^{\lambda} + t^h v(t, x)$ と置くと,

$$P(t^h v) = f - P \left(\sum_{\lambda=0}^{h-1} u_{\lambda}(x) t^{\lambda} \right)$$

となる。この方程式は

$$Qv = t^{-h} \left\{ f - P \left(\sum_{\lambda=0}^{h-1} u_{\lambda}(x) t^{\lambda} \right) \right\}$$

に同値である。右辺を $g(t, x)$ と表わす。これは t について正則だが x については V に沿って singular である。

下記の条件の下で $Qv = g$ を解けばよい：

- $x = 0$ の近傍で $\operatorname{Re} \mu_r(x) < 0$ ($r = 1, 2, \dots, m$)
- 正定数 C_g と正整数 m_g が存在して $|g(t, x)| \leq C_g/d(x)^{m_g}$ が $(t, x) = (0, 0)$ の近傍で成り立つ。

この g に関する評価は次の補題から出る。補題の証明はこの講究録のもう一つの論説の付録に書いた。(そこではもう少し強い形で述べた。)

補題 3 $F(x)$ を \mathbb{C}_x^n の原点の近傍の正則関数とする。 $F(0) = 0$, $F \neq 0$ と仮定する。 $d(x)$ を点 x から $\{x; F(x) = 0\}$ への距離とする。このとき、正定数 C と正整数 M が存在して、原点の十分近くで

$$|F(x)| \geq Cd(x)^M。$$

$$Q - Q_m = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\beta| \leq m-j} \sum_{k=0}^{\infty} t^k b_{k+j,j,\beta}(x) (t^j D_t^j) D_x^{\beta}$$

と置く。ある β , $|\beta| = m - j$, について $b_{k+j,j,\beta}(x) \neq 0$ が成り立つとき、そのときに限り、 $(k, m - j) \in N_j(Q) = N_j(P)$ である。

$k_j \geq 1$ が、 $(k, m - j) \in N_j(Q) = N_j(P)$ が成り立つ最小の k であることを思い出そう。

$Q_m - Q$ は次の形の表示を持つ：

$$Q_m - Q = \sum_{j=0}^{m-1} \{t^{k_j} R_j(t, x, D_x) + t S_j(t, x, D_x)\} (D_t t)^j。$$

ここでもし $N_j(Q) \neq \emptyset$ ならば $\operatorname{ord} R_j = m - j$ であり、もし $N_j(Q) = \emptyset$ ならば $R_j = 0$ である。さらに $\operatorname{ord} S_j \leq m - j - 1$, $[R_j, t] = [S_j, t] = 0$ である。

$t^j D_t^j$ を使った定式化から $(D_t t)^j$ を使った定式化へ移ったわけだが, これには何の問題もない。なぜなら

$$t^j D_t^j = (D_t t)^j + \sum_{0 \leq k \leq j-1} C_{jk} (D_t t)^k, \quad C_{jk} \in \mathbb{Z},$$

だからである。

方程式 $Qv = g$ は次の積分方程式と同値である：

$$v = H \left[g + \sum_{j=0}^{m-1} (t^{k_j} R_j + t S_j) (D_t t)^j v \right].$$

ここで H は §2 で導入された積分作用素。この積分方程式を逐次近似で解こう。関数列 $\{v_p(t, x)\}_p$ を

$$\begin{aligned} v_0 &= 0, \\ v_{p+1} &= H \left[g + \sum_{j=0}^{m-1} (t^{k_j} R_j + t S_j) (D_t t)^j v_p \right] \quad (p \geq 0) \end{aligned}$$

で定義する。解 v は $v = \lim_p v_p$ で得られる。 $w_p = (D_t t)^m (v_{p+1} - v_p)$ と置くと

$$w_{p+1} = (D_t t)^m H \left[\sum_{j=0}^{m-1} (t^{k_j} R_j + t S_j) G_{m-j} w_p \right] \quad (p \geq 0).$$

$\sum_p w_p$ が収束するならば極限 $v = \lim_p v_p$ が存在する。これは $(D_t t)^m$ が topological automorphism だからである。

$|g(t, x)| \leq C_g/d(x)^{m_g}$ だから, $v_1 = H[g]$ に対しても同様の評価が成り立つ。よって正定数 $C' > 0$, $a > 0$ が存在して $|w_0(t, x)| \leq C'/d(x)^a$ が $(t, x) = (0, 0)$ の十分近くで成り立つ。

さて, p と (t, x) によらない正定数 $C > 0$ が存在して

$$|w_p(t, x)| \leq C^{p+1} \frac{|t|^p}{d(x)^{mp+a}} \quad (1)$$

が $|t| < \tilde{T}$, $x \in \tilde{\Omega}$, $p \geq 0$ に対して成り立つことを証明しよう。ここで \tilde{T} は十分小さい正定数で, $\tilde{\Omega}$ は $x = 0$ の十分小さい近傍である。

$p = 0$ の場合の証明は既に終わっている。(1) が p に対して成り立っていると仮定しよう。そうすると補題 2 により

$$|G_{m-j} w_p(t, x)| \leq \frac{C^{p+1}}{(p+1)^{m-j}} \frac{|t|^p}{d(x)^{mp+a}}. \quad (2)$$

ここで次の補題が必要となる：

補題 4 $F(x)$ を \mathbb{C}_x^n の領域 U の正則関数とする。 $d(x)$ を点 $x \in U$ から U の境界までの距離とする。任意の $x \in U$ に対して $|F(x)| \leq 1/d(x)^l$, $l > 0$, と仮定する。このとき $|D_j F(x)| \leq e(1+l)/d(x)^{1+l}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) である。

証明 $j = 1$ とすると

$$D_1 F(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{F(y, x_2, \dots, x_n)}{(y - x_1)^2} dy$$

である。ここで Γ は $\Gamma = \{y; |y - x_1| = d(x)/(1+l)\}$ で定義される円である。このとき任意の $y \in \Gamma$ に対して

$$d(y, x_2, \dots, x_n) \geq d(x) - \frac{1}{1+l}d(x) = \frac{l}{1+l}d(x)。$$

証明の残りは $\{(1+l)/l\}^l \leq e$ を用いる通常の技法でできる。 \square

(1) の証明に戻ろう。

$t^{k_j} R_j + t S_j \in t D(m-j)$ が成り立つ。ここで $D(m-j)$ は高々 $m-j$ 階の微分作用素の全体の集合。補題 4 と (2) から

$$\begin{aligned} & |(t^{k_j} R_j + t S_j) G_{m-j} w_p| \\ & \leq C^{p+1} C'_j \frac{(mp+a+1)_{m-j}}{(p+1)^{m-j}} \frac{|t|^{p+1}}{d(x)^{mp+m+a}} \end{aligned}$$

となる。ただし C'_j は p によらない正定数。ここで Pochhammer の記号を用いた：

$$(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)。$$

容易に分かるように $(mp+a+1)_{m-j}/(p+1)^{m-j}$ は p によらない正定数で抑えられる。よって C が十分大きければ、命題 2 により帰納法が進む。(1) の証明がこれで終わった。

次の目標は (1) よりも詳しい評価を得ることである。その証明では次の補題が必要になる：

補題 5 M を正定数とし,

$$|w(t, x)| \leq \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}}$$

が $|t| < \tilde{T}$, $x \in \tilde{\Omega}$, $k > 0$, $l > 0$ に対して成り立つと仮定する。さらに $0 < l/k \leq M$ と仮定する。このとき (k, l) と (t, x) によらない正定数 $C_j^{(1)} = C_j^{(1)}(a, M)$, $C_j^{(2)} = C_j^{(2)}(a, M)$ が存在して

$$\begin{aligned} |t^{k_j} R_j G_{m-j} w(t, x)| &\leq C_j^{(1)} \frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}}, \\ |t S_j G_{m-j} w(t, x)| &\leq C_j^{(2)} \frac{1}{k} \frac{|t|}{d(x)^{m-1}} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}} \end{aligned}$$

が $|t| < \tilde{T}$, $x \in \tilde{\Omega}$ に対して成り立つ。

証明 正定数 $C(R_j)$ が存在して

$$|R_j G_{m-j} w(t, x)| \leq C(R_j) \frac{(l+a+1)_{m-j}}{(k+1)^{m-j}} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a+m-j}}.$$

もし $0 < l/k \leq M$ ならば $(l+a+1)_{m-j}/(k+1)^{m-j}$ は (k, l) によらない正定数で抑えられる。

次に $\text{ord } S_j \leq m-j-1$ なので, 正定数 $C(S_j)$ が存在して

$$\begin{aligned} |S_j G_{m-j} w(t, x)| &\leq C(S_j) \frac{(l+a+1)_{m-j-1}}{(k+1)^{m-j}} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a+m-j-1}} \\ &\leq C(S_j) \frac{(l+a+1)_{m-j-1}}{(k+1)^{m-j-1}} \frac{1}{k+1} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a+m-j-1}}. \end{aligned}$$

もし $0 < l/k \leq M$ ならば $(l+a+1)_{m-j-1}/(k+1)^{m-j-1}$ は (k, l) によらない正定数で抑えられる。□

正整数 $q \geq 1$ を固定し,

$$C_3 = A \max\{C_j^{(i)}; i = 1, 2, j = 0, 1, \dots, m-1\}$$

と置く。ここで A は命題 2 のものである。

命題 3 もし $p \geq q$ ならば

$$|w_p(t, x)| \leq C_3^{p-q} \left(\sum_j' \frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} + \frac{m}{q} \frac{|t|}{d(x)^{m-1}} \right)^{p-q} \cdot C^q \frac{|t|^q}{d(x)^{mq+a}}$$

が $|t| < \tilde{T}$, $x \in \tilde{\Omega}$ に対して成り立つ。ここで \sum_j' は $N_j(Q) \neq \emptyset$ を満たす j たちに関する和である。

証明 $p = q$ の場合は (1) に含まれているので証明済みである。

p の場合に求める評価が成り立つと仮定しよう。つまり、次を仮定する：

$$|w_p(t, x)| \leq \sum_{(k,l) \in I_p} C_{kl}^{(p)} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}}.$$

ここで I_p は $\{(k, l); k \geq q, l \geq mq, 0 < l/k \leq m\}$ のある有限部分集合であり、 $C_{kl}^{(p)}$ は正定数である。補題 5 と命題 2 を用いて

$$\begin{aligned} & |w_{p+1}(t, x)| \\ & \leq \sum_{(k,l) \in I_p} AC_{kl}^{(p)} \left(\sum_j' C_j^{(1)} \frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} + \sum_{j=0}^{m-1} C_j^{(2)} \frac{1}{q} \frac{|t|}{d(x)^{m-1}} \right) \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}} \\ & = A \left(\sum_j' C_j^{(1)} \frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} + \sum_{j=0}^{m-1} C_j^{(2)} \frac{1}{q} \frac{|t|}{d(x)^{m-1}} \right) \sum_{(k,l) \in I_p} C_{kl}^{(p)} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}} \\ & \leq C_3 \left(\sum_j' \frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} + \frac{m}{q} \frac{|t|}{d(x)^{m-1}} \right) \sum_{(k,l) \in I_p} C_{kl}^{(p)} \frac{|t|^k}{d(x)^{l+a}} \end{aligned}$$

を得る。よって帰納法が進む。 □

$q = 1, 2, \dots$ に対して

$$\tilde{\Omega}_q = \{(t, x); |t| < \tilde{C}d(x)^{I(Q)}, |t| < \frac{q}{3mC_3}d(x)^{m-1}, x \in \tilde{\Omega}\}, \quad \tilde{C} > 0,$$

と置く。このとき

命題 4 q によらない正定数 \tilde{C} が存在して、級数 $\sum_{p \geq 0} w_p$ は $\tilde{\Omega}_q$ で収束する。

証明 $\sum_{p \geq q} w_p$ の収束を示せばよい。

まず $I(Q) = \max\{(m-j)/k_j; N_j(Q) \neq \emptyset\}$ に注意しよう。したがって $k_j I(Q) \geq m-j$, $d(x)^{k_j I(Q)} \leq d(x)^{m-j}$ となる。ここで $\tilde{\Omega}$ は, $d(x) < 1$ が任意の $x \in \tilde{\Omega}$ に対して成り立つように十分小さく取っている。

$\tilde{C} > 0$ を, $\tilde{C}^{k_j} < 1/3mC_3$ が任意の $j \in \{j; N_j(Q) \neq \emptyset\}$ に対して成り立つように十分小さく取る。このときもし $|t| < \tilde{C}d(x)^{I(Q)}$ ならば

$$\sum_j' \frac{|t|^{k_j}}{d(x)^{m-j}} \leq \sum_j' \left(\frac{|t|}{d(x)^{I(Q)}} \right)^{k_j} \leq \sum_j' \tilde{C}^{k_j} < \frac{1}{3C_3}$$

である。

次にもし $|t| < qd(x)^{m-1}/3mC_3$ ならば

$$\frac{m}{q} \frac{|t|}{d(x)^{m-1}} < \frac{1}{3C_3}$$

である。

これら 2 つの評価と命題 3 を用いて,

$$|w_p| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{p-q} C^q \frac{|t|^q}{d(x)^{mq+a}}, \quad p \geq q,$$

が $|t| < \tilde{T}$, $x \in \tilde{\Omega}$ のときに成り立つことが分かる。 $\sum_{p \geq q} w_p$ が収束することがこれで示された。□

q は任意であって \tilde{C} と C_3 は q によらないから, $\sum_{p \geq 0} w_p$ が

$$\cup_{q \geq 1} \tilde{\Omega}_q = \{(t, x); |t| < \tilde{C}d(x)^{I(Q)}, x \in \tilde{\Omega}\}$$

で収束することが分かる。 $\lim_p v_p$ の収束が従い, 主定理のウェイト 0 の場合の証明が終わった。ここで $I(P) = I(Q)$ に注意しよう。

4 一般の場合の証明

主定理の一般の場合を証明しよう。解 u を

$$u(t, x) = \sum_{\lambda=0}^{m-m'-1} \frac{1}{\lambda!} f_\lambda(x) t^\lambda + t^{m-m'} v(t, x)$$

の形で求める。初期条件は明らかに満たされる。方程式 $Pu = f$ は

$$Pt^{m-m'}v = f - P \left\{ \sum_{\lambda=0}^{m-m'-1} \frac{1}{\lambda!} f_{\lambda}(x) t^{\lambda} \right\}$$

に同値である。この右辺は既知の正則関数である。容易に示されるように $Pt^{m-m'}$ はウェイト 0 の Fuchs 型偏微分作用素で $N(Pt^{m-m'}) = N(P)$, したがって, $I(Pt^{m-m'}) = I(P)$ が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned} V &= \{x; C(\lambda, x) = 0 \text{ がある整数 } \lambda \geq m - m' \text{ に対して成り立つ}\} \\ &= \{x; C'(\lambda, x) = 0 \text{ がある整数 } \lambda \geq 0 \text{ に対して成り立つ}\} \end{aligned}$$

を示すことができる。ここで C' は $Pt^{m-m'}$ の特性多項式である。これで一般の場合はウェイト 0 の場合に帰着され, §3 の結果より, 一般の場合の証明も終わったことになる。

謝辞 [2] のレフェリーから有益なコメントをいただいたことに感謝する。

References

- [1] Yamane H., Nonlinear Singular First Order Partial Differential Equations Whose Characteristic Exponent Takes a Positive Integral Value, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **33**(5)(1997).
- [2] Yamane H., Singularities in Fuchsian Cauchy Problems with holomorphic data, *to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.*
- [3] Baouendi M.S. and Goulaouic G., Cauchy Problems with Characteristic Initial Hypersurface, *Comm. Pure Appl. Math.*, **26**(1973), 455-475.
- [4] Tahara H., Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, *Japan. J. Math.*, **5**(1979), 245-347.
- [5] Fujiie S., Singular Cauchy problems of higher order with characteristic surface, *J. Math. Kyoto Univ.*, **33**(1993), 1-27.

- [6] Ouchi S., Singularities of solutions of equations with noninvolutive characteristics-I; the case of second order Fuchsian equations, *J. Math. Soc. Japan*, **45**(2)(1993), 215-251.